**Лекція 8**

**Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)**

**8.1. Основні означення та теореми**

Нехай задано систему *m* лінійних рівнянь *n* невідомими



Розв’язати систему– це означає знайти впорядковану сукупність чисел таку, що при заміні  відповідно на  кожне рівняння перетворюється на тотожність.

Систему рівнянь можна записати у векторній формі. Для цього введемо у просторі, розмірність якого дорівнює числу рівнянь, вектори

;  ;…;  ;  .

Тоді система набуде вигляду .

В цьому випадку розв’язання системи можна звести до встановлення лінійної залежності системи векторів  і .

Якщо ввести матрицю коефіцієнтів системи векторів, матрицю-стовбець правої частини і матрицю-стовбець невідомих

; ; , то , використовуючи означення добутку матриць, систему можна записати у вигляді

.

Ця форма запису системи називається **матричною**.

.

При постановці задачі про відшукання розв’язку системи, ми не задавали ніяких обмежень ні на число рівнянь, ні на число невідомих.

СЛАР

― може не мати розв’язків;

― може мати нескінченну множину розв’язків;

― може мати єдиний розв’язок.

Система лінійних рівнянь називається **сумісною**, якщо вона має хоча б один розв’язок, і **несумісною**, якщо не має розв’язків. Сумісну систему називають **визначеною**, якщо вона має єдиний розв’язок.

Дві системи називають рівносильними, якщо кожний розв’язок першої системи є розв’язком другої, і навпаки.

Будь-який розв’язок системи називають **частинним** розв’язком. Множину всіх частинних розв’язків називають **загальним розв’язком системи**.

**Дослідження і розв’язання загальних систем лінійних алгебраїчних рівнянь**

**Елементарними перетвореннями** СЛАР називають:

1. переставляння рівнянь;
2. множення обох частин якого-небудь рівняння на число, відмінне від нуля;
3. додавання до рівняння іншого рівняння, помноженого на деяке число.

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь, одержані одна з одної елементарними перетвореннями, називають **еквівалентними**.

Матриця *А* коефіцієнтів при невідомих системи називається **основною**.

Приєднаємо до матриці *А* стовбець вільних членів. Дістанемо так звану **розширену матрицю **даної системи:

.

**Теорема Кронекера – Капеллі (умова сумісності системи лінійних рівнянь).**Система лінійних алгебраїчних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці: .

**Доведення**. Якщо СЛАР має розв’язок , то вектор є лінійною комбінацією векторів , тобто стовпчик із вільних членів матриці є лінійною комбінацією стовпців матриці *А* системи. Базисні мінори матриць *А* і ****не змінювались:  , і, згідно з теоремою про базисний мінор, справедливе рівняння , тобто система має розв’язок.

**Наслідки з теореми Кронекера – Капеллі.**

1. Якщо ранг матриці системи дорівнює ранку розширеної матриці і дорівнює кількості невідомих, то система має єдиний розв’язок.
2. Якщо ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці, але менший за кількість невідомих, то система має безліч розв’язків.

**8.2. Методи розв’язання визначених СЛАР**

**Матричний метод**

Розглянемо СЛАР у матричній формі: , де *А* – квадратна матриця *n*-ого порядку, і нехай , тобто  ― матриця *А* оборотна. Помножимо обидві частини матричного рівняння на : .

Одержимо розв’язок СЛАР і матричного рівняння, якому вона еквівалентна: . Отже, для того, щоб знайти розв’язок визначеної СЛАР, необхідно знайти матрицю, обернену до основної матриці системи і виконати множення цієї матриці на матрицю вільних членів.

**Приклад 8.1.** Розв’язати систему матричним методом:

.

**Розв’язання.**

 - основна матриця системи.

. .

.

**Відповідь:** .

**Правило Крамера**

Якщо в матричному методі розв’язання визначених СЛАР врахувати формулу для обчислень елементів оберненої матриці, то дістанемо:

, 

Кожен елемент розв’язку визначається так: .

Запис означає обчислення визначника, у якого на *j-*ому місці стоїть стовпчик вільних членів. Тоді, . Це формули Крамера для обчислення розв’язків визначеної системи. Правило Крамера застосовують переважним чином для розв’язання систем двох і трьох лінійних рівнянь.

**Приклад 8.2.** Розв’язати систему за правилом Крамера:

.

**Розв’язання.**

 - головний визначник системи.

; ;.

.

**Відповідь:** .

**8.3. Дослідження і розв’язання загальних СЛАР**

**Метод Гаусса - Жордано**

Нехай задано систему *m* лінійних рівнянь з *n* невідомими:

.

Крок 1. Записують розширену матрицю системи:

.

Крок 2. За допомогою елементарних перетворень зводять матрицю до східчастого вигляду:

.

Крок 3. Досліджують систему на сумісність за теоремою Кронекера – Капеллі.

Якщо хоча б один з вільних членів в нульових рядках відмінний від нуля, то система не сумісна. Якщо ранги рівні, то система сумісна.

Крок 4. У разі сумісності перетворюють східчасту матрицю до зведеного східчастого вигляду:

.

Крок 5. Знаходять розв’язки одержаної системи. Моливі два випадки:

1. кількість змінних дорівнює рангу матриці системи ():

;

1. кількість змінних n більша від кількості рівнянь ():

Змінні, які відповідають лідерам рядків, називають **базисними змінними**, а решту змінних – **вільними**.

Вільним змінним надають довільних значень  і виражають через них базисні змінні:

.

Крок 6. Записують загальний розв’язок системи у векторному вигляді:



**Приклад 8.3.** Розв’язати методом Гаусса систему

.

**Розв’язання.** Крок 1. Розширена матриця системи: .

Крок 2. До східчастого вигляду:



.

Крок 3. За теоремою Кронекера – Капеллі система сумісна і визначена.

Крок 4. До зведеного східчастого вигляду:

.

Крок 5-6. .

**Відповідь**: .

**Приклад 8.4.**Показати, що система  несумісна*.*

**Розв‘язання**.Випишемо розширену матрицю системи: .

Застосуємо до неї метод Гаусса елементарних перетворень: -отримали, що 0= - 44, це означає, що система розв’язків не має.

**Відповідь***.* Система несумісна.